

数列 $\{a_n\}$ の添字 n が偶数の場合と奇数の場合で一般項が異なるときの処理

a_n

↑

呼び名：インデックス (index), サフィックス (suffix), 添字

例題

$a_1 = 2, a_2 = 4, 2a_{n+2} = a_n + 3$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解法

$a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2m-1}$ と $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2m}$ に分ける。

↓

$a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2m-1}$ の場合 $a_n = a_{2m-1}$

$a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2m}$ の場合 $a_n = a_{2m}$

とおく。

↓

さらに,

$a_1 = b_1, a_3 = b_2, a_5 = b_3, \dots, a_{2m-1} = b_m$

$a_2 = c_1, a_4 = c_2, a_6 = c_3, \dots, a_{2m} = c_m$

とおくと,

$b_m = a_{2m-1} = a_n, c_m = a_{2m} = a_n$ という関係になる。

↓

数列 $\{b_m\}, \{c_m\}$ の一般項を求める。

$2a_{n+2} = a_n + 3$ より,

$a_n = b_m$ のとき

$$2b_{m+1} = b_m + 3$$

$$\therefore b_{m+1} = \frac{1}{2}b_m + \frac{3}{2}$$

$$\therefore b_{m+1} - 3 = \frac{1}{2}(b_m - 3)$$

$$\therefore b_m - 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} (b_1 - 3)$$

$$b_1 = a_1 = 2 \text{ より, } b_m = -\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + 3$$

$a_n = c_m$ のとき

$$b_m \text{ の求め方と同様にして, } c_m = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + 3$$

↓

$\{a_n\}$ の一般項を求める。

n が奇数のとき

$$b_m = a_{2m-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + 3$$

$$a_n = a_{2m-1} \text{ より, } m = \frac{n+1}{2}$$

$$\text{よって, } n \text{が奇数のとき, } a_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} + 3$$

n が偶数のとき

$$c_m = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + 3$$

$$a_n = a_{2m} \text{ より, } m = \frac{n}{2}$$

$$\text{よって, } n \text{が偶数のとき, } a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}} + 3$$

応用

数列 $\{a_n\}$ の添字が $n=3m-2$, $n=3m-1$, $n=3m$ の場合で一般項が異なるときの処理

$$b_m = a_{3m-2} = a_n, \quad c_m = a_{3m-1} = a_n, \quad d_m = a_{3m} = a_n \text{ において,}$$

数列 $\{b_m\}$, 数列 $\{c_m\}$, 数列 $\{d_m\}$ の一般項を求める。

↓

$$b_m = f(m), \quad c_m = g(m), \quad d_m = h(m) \text{ となったとする。}$$

$n=3m-2$ のとき

$$a_{3m-2} = f(m) \text{ より, } a_n = f\left(\frac{n+2}{3}\right)$$

$n=3m-1$ のとき

$$a_{3m-1} = g(m) \text{ より, } a_n = g\left(\frac{n+1}{3}\right)$$

$n=3m$ のとき

$$a_{3m} = h(m) \text{ より, } a_n = h\left(\frac{n}{3}\right)$$